Бірсарынды тізбектер.

Егер $\{x_n\}$ тізбегінің мүшелері $x_n < x_{n+1}$, $n \in \mathrm{N}$, теңсіздігін қанағаттандырса, онда оны өспелі, ал $x_n \le x_{n+1}$, $n \in \mathrm{N}$, болса, онда оны кемімейтін тізбек деп атайды. Егер тізбек мүшелері $x_n > x_{n+1}$, $n \in \mathrm{N}$болса, онда оны кемімелі тізбек деп, ал $x_n \ge x_{n+1}$, $n \in \mathrm{N}$, болса, оны өспейтін тізбек деп айтады. Мұндай тізбектер бірсарынды деп аталады да, оның өспелі және кемімелі тізбектері қатаң бірсарынды деп аталады.

$\{x_n\}$ тізбегі жоғарыдан шенелген немесе жоғарыдан шектелген деп аталады, егер M саны табылып, барлық $n \in \mathrm{N}$ үшін $x_n < M$ болса, $\{x_n\}$ тізбегі төменнен шенелген немесе төменнен шектелген деп аталады, егер m саны табылып, барлық $n \in \mathrm{N}$ үшін $m < x_n$ болса.

Бірсарынды тізбек шегінің бар болуы туралы Вейерштрасс критерийі деп аталатын маңызды негізгі теореманы келтірейік.

1-теорема (Вейерштрасс критерийі). Кемімейтін тізбектің шегінің бар болуы үшін оның жоғарыдан шектеулі, ал өспейтін тізбектің шегінің бар болуы үшін оның төменнен шектеулі болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Тізбек жинақты болса, оның шектеулі болатынын тізбектің жалпы қасиеттерінде дәлелдегенбіз.

Жеткіліктігі. Жеткіліктігін кемімейтін тізбек үшін дәлелдейік. Айталық $\{x_n\}$ тізбегі жоғарыдан шектелген болса, онда оның дәл жоғарғы шекарасы $s = \sup\limits_{n \in \mathrm{N}} x_n$ бар. Ал дәл жоғарғы шекара анықтамасы бойынша

$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ x_N \in \{x_n\} \ (s - \varepsilon < x_N \le s)$.

Тізбек кемімейтін болғандықтан $\forall n > N$ үшін $s - \varepsilon < x_N \le x_n \le s$, яғни $|s - x_n| = s - x_n < \varepsilon$. Сонымен, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = s = \sup\limits_{n \in \mathrm{N}} x_n$. Дәл осылай өспейтін тізбек үшін де дәлелдеуге болады. Бұл жағдайда $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \inf\limits_{n \in \mathrm{N}} x_n$.

Бірсарынды тізбектер бір жақты шенелген, сондықтан кемімейтін тізбектің жоғарыдан, ал өспейтін тізбектің төменнен шектеулі болуы тізбектің шектеулі болуымен тең мағыналы.

Бірнеше маңызды мысалдар келтірейік.

1. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{q^n} = 0$, егер $q > 1$ болса. Шынында да, егер $x_n = \dfrac{n}{q^n}$ десек,

$x_{n+1} = \frac{n+1}{q^{n+1}} = \frac{n+1}{nq} x_n$, $\forall n \in \mathrm{N}$. Ал $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} = \frac{1}{q} < 1$ болғандықтан, N нөмірі табылып, барлық $n > N$ үшін $\frac{n+1}{nq} < 1$, сондықтан $x_{n+1} < x_n$, $\forall\, n > N$. Тізбектің саны ақырлы мүшелерінің тізбек жинақтылығына әсері болмағандықтан, бізге $x_{N+1} > x_{N+2} > \ldots$ тізбегінің шегін тапсақ болғаны. Бұл тізбек мүшелері оң, демек, төменнен шектеулі екенін көреміз, сондықтан жоғарыдағы Вейерштрасс критерийінен оның шегінің бар екені шығады. Айталық, ол шек a болсын, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = a$ болсын. Сонда

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{q} a,$$

мұнан $\left(1 - \frac{1}{q}\right) a = 0$. Демек, $a = 0$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Шынында да, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathrm{N}\ \forall n > N\ (1 \le n < (1+\varepsilon)^n)$.

Сондықтан $n > N$ үшін $1 \le \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$, демек, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$, $q \in \mathrm{R}$, $n \in \mathrm{N}$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Егер $q = 0$ болса, онда тұжырым айқын. Ал $\left|\frac{q^n}{n!}\right| = \frac{|q|^n}{n!}$ болғандықтан шектің нөлге тең екенін тек $q > 0$ үшін ғана дәлелдесек болғаны. Егер $x_n = \frac{q^n}{n!}$ десек, онда $x_{n+1} = \frac{q}{n+1} x_n$. Ал q қандай болмасын $n > N$ болғанда $\frac{q}{n+1} < 1$ болатын N нөмірі табылып, барлық $n > N$ үшін $x_{n+1} < x_n$ теңсіздігін аламыз. Мүшелері оң болғандықтан, бұл тізбек төменнен шектелген, сондықтан шегі бар және ол a болсын, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = a$. Сонда

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{q}{n+1} \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \cdot a = 0, \text{ демек, } a = 0.$$

***e* саны.**

Арифметикада 1 саны, ал геометрияда π саны сияқты анализде айрықша ролі бар сандардың бірі - Эйлердің белгілеуінен бастап *e* саны деп аталатын және

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2 \ldots$$

тізбегінің шегі болатын санның бар екенін дәлелдеумен айналысамыз.

Алдымен Бернулли теңсіздігі деп аталатын

$$(1+\alpha)^n \ge 1 + n\alpha,\ n \in N,\ \forall \alpha > -1, \qquad (1)$$

теңсіздігін математикалық индукция әдісімен дәлелдейік. Шынында да, (1) теңсіздік $n = 1$ болғанда орындалады. Егер ол $n = k$ үшін орындалса, онда $k + 1$ үшін де орындалады, өйткені

$$(1+\alpha)^{k+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^k \ge (1+\alpha)(1+k\alpha) = 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2 \ge 1 + (k+1)\alpha,$$

демек, (1) теңсіздік кез-келген $n \in \mathrm{N}$ үшін орындалады.

Енді $y_n = x_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ тізбегінің кемімелі және төменнен шектелген екенін көрсетейік. Ол үшін $n \geq 2$ деп, Бернулли теңсіздігін пайдаланып,

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{\left(n^2-1\right)^n}\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\frac{n}{n+1} \geq$$

$$\geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1} = 1$$

болатынын, яғни $y_n < y_{n-1}$ екенін анықтаймыз. Демек, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n$ тізбегі кемімелі. Ал тізбектің мүшелері оң болғандықтан, ол төменнен шектелген.

Сондықтан Вейерштрасс критерийі бойынша $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ тізбегінің шегі бар. Сонымен бірге,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Қорытындысында біз x_n тізбегінің шегі бар екенін дәлелдедік, сол санды e арқылы белгілейміз:

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

№ 3 дәріс

Тізбектің жоғарғы және төменгі шектері, қасиеттері. Тізбектің жинақтылық критерийі. Фундаментальдық тізбек. Коши критерийі.

Біз Больцано-Вейерштрасс теоремасы бойынша шектеулі тізбектен жинақталатын ішкі тізбек бөліп алуға болатынын көрдік. Ал, егер тізбек шектелмеген болса ше? Оған мына теорема жауап береді.

1-теорема. Кез-келген нақты сандар тізбегінен әрқашанда жинақталатын немесе шексіздікке ұмтылатын тізбек бөліп алуға болады.

Дәлелдеуі. Бұл теореманың бірінші жартысы жоғарыдағы Больцано-Вейерштрасс теоремасы, ал $\{x_n\}$ тізбегінің шектеусіз болуы бұл теореманың жаңалығы. Сондықтан да осы жағдайын ғана дәлелдейміз.

Айталық $\{x_n\}$ тізбегі шектеусіз болсын. Онда кез-келген $k \in \mathbb{N}$ арқылы $\left|x_{n_k}\right| > k$ және $n_k < n_{k+1}$ болатын нөмірлер $n_k \in \mathbb{N}$ таңдап алуға болады. Сонда шексіздікке ұмтылатын $\{x_{n_k}\}$ ішкі тізбегін аламыз. Теорема дәлелденді.

Айталық бізге нақты сандардың кез-келген $\{x_k\}$ тізбегі берілсін. Егер ол төменнен шектеулі болса, онда $i_n = \inf_{k\geq n} x_k$ тізбегін қарастыруға болады. Ал $i_n \leq i_{n+1}$ болғандықтан $\{i_n\}$ тізбегінің ақырлы шегі $\lim_{n\to\infty} i_n = l$ немесе $\lim_{n\to\infty} i_n = +\infty$ шегі бар.

$l = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$ санын $\{x_k\}$ тізбегінің төменгі шегі деп атайды да, $\underline{\lim}_{k\to\infty} x_k$ немесе $\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$ арқылы белгілейді. Егер $i_n \to +\infty$ болса, онда тізбектің төменгі шегі $+\infty$ деп атау қабылданған және $\underline{\lim}_{k\to\infty} x_k = +\infty$ немесе $\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k = +\infty$ деп жазу қабылданған. Егер $\{x_k\}$ тізбегі төменнен шектелмеген болса, онда $\forall n \in \mathbb{N}$ үшін $i_n = \inf_{k\geq n} x_k = -\infty$ аламыз. Бұл жағдайда тізбектің төменгі шегі минус шексіздікке тең деп атайды да $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$ немесе $\lim_{k\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k = -\infty$ деп жазады.

Сонымен, барлық келтірілген жағдайларды ескере отырып, $\{x_k\}$ тізбегінің төменгі шегінің анықтамасын қысқаша былай

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$$

жазамыз.

Дәл осылай егер $\{x_k\}$ тізбегі жоғарыдан шектелген болса, онда $s_n = \sup_{k\geq n} x_k$ тізбегін қарастырамыз, ал кез-келген $n \in \mathbb{N}$ үшін $s_n \geq s_{n+1}$ болғандықтан $\{s_n\}$ тізбегінің шегі $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ ақырлы сан немесе $s_n \to -\infty$ болады. Осы $L = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$ санын $\{x_k\}$ тізбегінің жоғарғы шегі деп атап, $\overline{\lim}_{k\to\infty} x_k$ немесе $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$ арқылы белгілейді.

Егер $s_n \to -\infty$ болса, онда жоғарғы шек минус шексіздікке тең деп және $\overline{\lim}_{k\to\infty} x_k = -\infty$ немесе $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k = -\infty$ деп жазу қабылданған. Егер берілген тізбек жоғарыдан шектелмеген болса, онда $\forall\, n \in \mathbb{N}$ үшін $s_n = \sup_{k\geq n} x_k = +\infty$ екенін аламыз. Бұл жағдайда тізбектің жоғарғы шегі плюс шексіздікке тең деп айтады да, былай $\overline{\lim}_{k\to\infty} x_k = +\infty$ немесе $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k = +\infty$ деп жазады. Сөйтіп,

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k .$$

Бірнеше мысал келтірейік.

1. $x_k = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$, тізбегі үшін

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} (-1)^k = -1$$

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k = \lim_{n\leftrightarrow\infty} \sup_{k\geq n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

2. $x_k = k^{(-1)^k}$, $k \in \mathbb{N}$ тізбегі үшін

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} x_k = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} x_k = \lim_{n\to\infty} (+\infty) = +\infty.$$

3. $x_k = \dfrac{(-1)^k}{k}$, $k \in N$, тізбегі үшін

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} \frac{(-1)^k}{k} = \lim \begin{cases} -\dfrac{1}{n}, n = 2m+1 \\ -\dfrac{1}{n+1}, n = 2m \end{cases} = 0,$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, n = 2m+1 \\ \dfrac{1}{n}, n = 2m \end{cases} = 0.$$

4. $x_k = -k^2$, $k \in N$, тізбегі үшін

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} (-k^2) = -\infty,$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} \left(-k^2\right) = -\infty.$$

Берілген сандық $\{x_n\}$ тізбегі фундаментальдік немесе Коши тізбегі деп аталады, егер кез-келген $\varepsilon > 0$ саны үшін N нөмірі табылып, барлық $n > N, m > N$ үшін $|x_n - x_m| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса.

Мұның кванторлар арқылы жазылуын келтірейік:

$\{x_n\}$-фундаментальді $:= \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathrm{N},\ \forall n > N \forall m > N\left(|x_n - x_m| < \varepsilon\right).$

Енді Коши тізбегі болмайтын тізбектің кванторлар арқылы жазылуын келтірейік: $\{x_n\}$ тізбегі фундаментальдік емес:

$$:= \exists\varepsilon > 0\ \forall N \in \mathrm{N},\ \exists n(N) > N\ \ \exists m(N) > N\ \left(\left|x_{n(N)} - x_{m(N)}\right| \ge \varepsilon\right), \qquad (1)$$

яғни егер тиянақты ε оң саны үшін N натурал саны қандай болмасын нөмірлері одан үлкен, ал мәндерінің айырымы алған ε санынан кем болмайтын мүшелері бар болса, ондай тізбек Коши тізбегі емес.

Мысалы. $(-1)^n$ тізбегі фундаментальдік емес. Шынында да, тиянақты $\varepsilon = 1$ санын алсақ, онда кез-келген $N \in \mathrm{N}$ үшін $|x_{N+1} - x_{N+2}| = |1 - (-1)| = 2 > 1 = \varepsilon$, яғни (1) анықтама бойынша $\{x_n\} = (-1)^n$ тізбегі фундаментальдік емес.

1-теорема. Егер $\{x_n\}$ тізбегі фундаментальдік болса, онда ол шектеулі.

тізбегінің жинақты болуы үшін оның

2-теорема(Коши критерийі). $\{x_n\}$

фундаментальдік болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Айталық $\{x_n\}$ тізбегі жинақты және оның шегі a болсын. Сонда мұның фундаментальдік екенін көрсетейік.

$$x_n \to a := \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \forall n > N \left(|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Демек, $n, m > N$ үшін $|x_n - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, яғни $\{x_n\}$- фундаментальдік тізбек.

Жеткіліктілігі. $\{x_n\}$- фундаментальдік тізбек болсын. Онда оның жинақталатын тізбек екенін көрсетейік. 1-теорема бойынша $\{x_n\}$-шектеулі тізбек, ал Больцано-Вейерштрасс теоремасы бойынша одан белгілі бір a санына жинақталатын $\{x_{n_k}\}$ ішкі тізбегін бөліп алуға болады. Енді $\{x_n\}$ тізбегінің осы a санына жинақталатынын дәлелдейік.

$\{x_n\}$ фундаментальдік болғандықтан, кез-келген ε оң саны үшін N_1 нөмірі табылып, $m, n > N_1$ болғанда $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ теңсіздігі орындалады, ал $n_k \ge n$ болғандықтан, соңғы теңсіздікте $m = n_k$ десек, $|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n > N_1$, теңсіздігін аламыз. $\{x_{n_k}\}$ тізбегі жинақты, сондықтан $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \ \forall n > N_2$ ($|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$). Енді $N = \max(N_1, N_2)$ болса, онда $n > N$ нөмірінен бастап

$$|x_n - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2.$$